Bisekcja

środek przedziału w bisekcji ★

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

Dla ciągłej funkcji f na [a,b], a < b, ze zmianą znaku f(a)f(b) < 0, środek przedziału dzieli go na dwie połowy. Jeśli $f(x_m) = 0$, znaleziono pierwiastek; w przeciwnym razie zachowujemy połowę ze zmianą znaku. Po n podziałach szerokość przedziału wynosi $(b - a)/2^n$, a błąd jego środka nie przekracza $(b - a)/2^{n+1}$.

Błędy obliczeń

błąd bezwzględny przybliżenia

$$\varepsilon = |x - x_0|$$

błąd względny przybliżenia

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|x_0|}$$

x jest przybliżeniem, x_0 wartością odniesienia. Błąd względny jest zdefiniowany tylko dla $x_0 \neq 0$; w procentach wynosi $100\% \cdot \varepsilon_r$. To błąd względem wartości odniesienia, a nie automatycznie niepewność pomiarowa.

Newton, interpolacja i całkowanie

krok metody Newtona

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{d_n}$$

W tym wzorze $y_n = f(x_n)$, $d_n = f'(x_n) \neq 0$. Funkcja musi być różniczkowalna w punktach iteracji. Zbieżność zależy od funkcji i punktu startowego; metoda nie gwarantuje znalezienia pierwiastka dla dowolnego startu.

interpolacja liniowa

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$$

Punkty (x_0,y_0), (x_1,y_1) muszą mieć różne odcięte. Dla x między x_0 i x_1 jest to interpolacja, poza tym przedziałem — ekstrapolacja. Wartość y jest wartością prostej łączącej dane punkty; może różnić się od wartości interpolowanej funkcji.

prosta reguła trapezów

$$I_T = \frac{b-a}{2}(y_a + y_b)$$

$y_a = f(a)$, $y_\beta = f(b)$, $y_m = f((a+b)/2)$, a < b. I_T i I_S są przybliżeniami całki z f po [a,b], a nie jej dokładną wartością dla dowolnej funkcji. Reguła trapezów jest dokładna dla wielomianów stopnia najwyżej 1, a Simpsona najwyżej 3. Stosujemy jeden przedział; reguły złożone wymagają sumowania po podprzedziałach. y_a i y_b to ustalone wartości funkcji w punktach przedziału. Wyznaczenie a lub b z tego wzoru ma sens tylko dla takich ustalonych próbek; dla funkcji f wartości zależą od końców przedziału.

prosta reguła Simpsona $I_S = \frac{b-a}{6}(y_a + 4y_m + y_b)$

y_a = f(a), y_β = f(b), y_m = f((a+b)/2), a < b. I_T i I_S są przybliżeniami całki z f po [a,b], a nie jej dokładną wartością dla dowolnej funkcji. Reguła trapezów jest dokładna dla wielomianów stopnia najwyżej 1, a Simpsona najwyżej 3. Stosujemy jeden przedział; reguły złożone wymagają sumowania po podprzedziałach. y_a, y_m i y_b to ustalone wartości funkcji w punktach przedziału. Wyznaczenie a lub b z tego wzoru ma sens tylko dla takich ustalonych próbek; dla funkcji f wartości zależą od końców przedziału.

Interpolacja i równania różniczkowe

interpolacja Lagrange'a $P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

n+1 parami różnych węzłów; wielomian stopnia co najwyżej n.

jawna metoda Eulera $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$

Równanie y'=f(x,y); h krok, metoda pierwszego rzędu. Stabilność zależy od kroku i problemu.

złożony wzór trapezów

$$I \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right] \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

n ≥ 1, równe podprzedziały; przy dostatecznej gładkości błąd globalny rzędu h^2.

Symbole i jednostki

symbol	znaczenie	jednostka
a, b	końce przedziału (a < b)	—
a	dolna granica	
b	górna granica	
d_n	wartość pochodnej f' w punkcie x_n, różna od zera	—
f	prawa strona równania	
h	krok	
i, k	indeks	
I	całka	
I_T, I_S	przybliżenia całki regułą trapezów i Simpsona	—
j	indeks iloczynu	
n	numer iteracji (liczba całkowita)	—
n	maksymalny stopień	
P	wielomian interpolacyjny	
x, x_0, x_1	argument lub jego wartość odniesienia, zależnie od wzoru	—

symbol	znaczenie	jednostka
x	argument	
x_i	i-ty węzeł	
x_j	j-ty węzeł	
x_k	wartość zmiennej niezależnej w k-tym kroku	
x_m	środek przedziału	—
x_n, x_{n+1}	bieżące i następne przybliżenie pierwiastka	—
y, y_0, y_1	wartości interpolowanej prostej w odpowiednich punktach	—
y_a, y_b, y_m	wartości funkcji na końcach i w środku przedziału	—
y_i	wartość w i-tym węźle	
y_k	aktualne przybliżenie	
y_{k+1}	kolejne przybliżenie	
y_n	wartość funkcji f w punkcie x_n	—
ε	błąd bezwzględny	—
ε_r	błąd względny	—