Systemy liczbowe i kodowanie

Zapis pozycyjny

wartość liczby w systemie pozycyjnym ★

$$N_j = qN_{j-1} + a_j$$

Podstawa q jest całkowita i q ≥ 2. Cyfry a_0, a_1, …, a_m czytamy od najbardziej znaczącej do najmniej znaczącej. Każda cyfra a_j jest liczbą całkowitą od 0 do q − 1. Przyjmujemy $N_0 = a_0$, a następnie dla j = 1, …, m obliczamy $N_j = qN_{j-1} + a_j$; wartością całej liczby jest N_m. N_{j-1} oznacza nieujemną całkowitą wartość dotychczas odczytanego prefiksu. W systemie binarnym q = 2, więc każda cyfra ma wartość 0 albo 1.

Liczby binarne

największa liczba bez znaku na n bitach ★

$$N_{\max} = 2^n - 1$$

Liczba bitów n jest całkowita i dodatnia. Każdy bit ma wartość 0 albo 1; zakres liczb bez znaku to od 0 do $2^n - 1$.

liczba różnych kodów na n bitach $K = 2^n$

bity w bajcie $b = 8B$

Liczby ze znakiem i zmiennoprzecinkowe

zakres liczb w kodzie U2 $-2^{n-1} \le x \le 2^{n-1} - 1$

n bitów, n ≥ 1; x całkowite.

wartość słowa w kodzie U2

$$x = -b_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i$$

Bity $b_i \in \{0,1\}$; najbardziej znaczący bit ma ujemną wagę.

normalna liczba binarna IEEE 754

$$x = (-1)^s \left(1 + \frac{F}{2^p}\right) 2^{E-B}$$

Tylko liczby normalne: 0<E<2^e−1; s bit znaku, F całkowite pole ułamka, p jego szerokość. Zera, liczby subnormalne, nieskończoności i NaN mają osobne reguły. e to liczba bitów pola wykładnika E; dla binary32 e = 8, p = 23 i B = 127.

U2: znaczenie bitów i wartość słowa

bit	b_i	waga	wkład do x
b7	1	-128	-128
b6	0	64	0
b5	1	32	32
b4	1	16	16
b3	0	8	0
b2	1	4	4
b1	1	2	2
b0	0	1	0

n = 8; x = −74; zakres: −128 ≤ x ≤ 127.

U2: znaczenie bitów i wartość słowa. Przykład domyślny: słowo 10110110 ma n = 8 bitów. Bit b_7 ma wagę −128, pozostałe wagi są dodatnie. x = −128 + 32 + 16 + 4 + 2 = −74. Zakres 8-bitowego U2: −128 ≤ x ≤ 127.

IEEE 754 binary32: znak, wykładnik i ułamek

pole	bity (od najstarszego)	wartość dziesiętna
s (1 bit)	0	0
E (8 bitów)	10000001	129
F (23 bity)	01000000000000000000000	2097152

x = 5; s = 0, E = 129, F = 2097152; liczba normalna.

IEEE 754 binary32: znak, wykładnik i ułamek. Dla binary32: p = 23, B = 127. Przykład x = 5: s = 0, E = 129, F = 2097152; x = (1 + 1/4)·2². Wzór z początkową jedynką dotyczy wyłącznie 1 ≤ E ≤ 254. E = 0 oznacza zero lub liczbę subnormalną; E = 255 — nieskończoność lub NaN. Podziały linii w polu F nie zmieniają kolejności bitów.

Arytmetyka binarna bez obcinania wyniku

liczba	zapis binarny	dziesiętnie
a	1111	15
b	1	1
wynik	10000	16

1111 + 1 = 10000 (dziesiętnie 16). Bez obcięcia wyniku.

Arytmetyka binarna bez obcinania wyniku. Dane wejściowe są binarnymi liczbami bez znaku. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie całkowite działają na liczbach dowolnej potrzebnej długości wyniku. Znak minus przy wyniku nie jest zapisem U2. Przykład domyślny: 1111 + 1 = 10000.

Logika binarna

Operacje logiczne

negacja NOT ★ $y = 1 - x$

koniunkcja AND ★ $y = x_1 x_2$

alternatywa OR $y = x_1 + x_2 - x_1 x_2$

alternatywa wykluczająca XOR

$$y = x_1 + x_2 - 2x_1 x_2$$

W tych równaniach x, x_1, x_2 i y są bitami, czyli przyjmują wyłącznie 0 albo 1. AND daje 1 tylko dla dwóch jedynek, OR daje 1, gdy przynajmniej jeden argument jest równy 1, a XOR gdy argumenty są różne.

Prawa i bramki

prawa de Morgana

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Logika dwuwartościowa; nawiasy wskazują zakres negacji.

bramka NAND $Y = \neg(A \wedge B)$

Wyjście jest zerem tylko wtedy, gdy oba wejścia są jedynkami.

bramka NOR $Y = \neg(A \vee B)$

Wyjście jest jedynką tylko wtedy, gdy oba wejścia są zerami.

implikacja logiczna $A \Rightarrow B = \neg A \vee B$

Implikacja jest fałszywa tylko dla A=1, B=0.

równoważność logiczna

$$A \Leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Prawdziwa dla równych wartości wejściowych.

Tablica prawdy podstawowych operacji logicznych

A	B	A i B	A lub B	A XOR B	A NAND B	A NOR B	A ⇒ B	A ⇔ B
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Tablica prawdy podstawowych operacji logicznych. 0 oznacza fałsz, 1 oznacza prawdę. Alternatywa „lub” jest niewykluczająca; XOR jest alternatywą wykluczającą.

Dane i sieci komputerowe

Obrazy cyfrowe

liczba pikseli obrazu ★ $P = wh$

w i h to szerokość i wysokość obrazu w pikselach, a P to łączna liczba pikseli.

rozmiar nieskompresowanego obrazu $D = Pcd$

Dla obrazu nieskompresowanego każdy piksel przechowuje c kanałów, a na kanał przypada d bitów. Wzór nie uwzględnia nagłówków pliku, wyrównania ani metadanych. Wynik jest w bitach. P to liczba pikseli, c to liczba kanałów, d to liczba bitów na kanał, D to rozmiar w bitach. Pomijamy nagłówki, metadane i wyrównanie wierszy.

Kompresja danych

stopień kompresji $k = \frac{D_0}{D_1}$

D_0 to rozmiar danych przed kompresją, D_1 po kompresji, w tej samej jednostce; $D_1 > 0$. W tej konwencji większe k oznacza silniejsze zmniejszenie rozmiaru.

Przesyłanie danych

przepustowość łącza $R = \frac{D}{t}$

czas przesyłania danych $t = \frac{D}{R}$

Przepustowość podawana w bit/s oznacza liczbę bitów na sekundę. Producenci nośników zwykle używają przedrostków dziesiętnych: 1 MB = 1 000 000 B; system operacyjny może pokazywać jednostki binarne (MiB = 1 048 576 B). R > 0 oznacza stałą efektywną szybkość przesyłania albo średnią szybkość dla całego transferu, równą D/t. Nominalna szybkość łącza nie uwzględnia narzutu protokołów i przerw.

całkowite opóźnienie przesłania $t_c = t_p + \frac{D}{R}$

Model całkowitego opóźnienia dodaje czas propagacji sygnału do czasu transmisji danych. W praktyce dochodzi m.in. opóźnienie kolejek i przetwarzania w urządzeniach sieciowych. Model dotyczy jednego łącza o stałej przepustowości R > 0; D i R muszą używać tej samej jednostki danych.

Adresacja i informacja

liczba adresów w prefiksie IPv4 $N = 2^{32-p}$

p ∈ {0,…,32}; liczba wszystkich adresów. Liczby hostów nie wyznaczaj zawsze przez N–2: /31 i /32 mają szczególne zastosowania.

liczba adresów w prefiksie IPv6 $N = 2^{128-p}$

p ∈ {0,…,128}; nie odejmujemy dwóch adresów według reguły IPv4.

Algorytmy i złożoność

Liczba operacji

model liniowej liczby operacji ★ $T = an + b$

model kwadratowej liczby operacji $T = an^2 + bn + c$

Model T(n) = an + b ma wzrost liniowy, czyli O(n). Model T(n) = an² + bn + c ma wzrost kwadratowy, czyli O(n²). W pierwszym modelu zakładamy a > 0, w drugim a > 0. Przy zerowym współczynniku wiodącym stopień wzrostu może być niższy. Notacja O jest ograniczeniem górnym; dla tych modeli z dodatnim współczynnikiem wiodącym dokładniejszą klasą jest odpowiednio Θ(n) i Θ(n²). To modele liczby operacji, a nie uniwersalne wzory na czas dowolnego algorytmu.

Obliczenia równoległe

prawo Amdahla

$$S = \frac{1}{(1-p) + \frac{p}{s}}$$

p jest częścią programu, którą można zrównoleglić, a s przyspieszeniem tej części. Wzór zakłada niezmienioną, szeregową część programu; gdy czas części równoległej dąży do zera, niezmieniona część szeregowa ogranicza przyspieszenie do 1/(1 − p), jeśli p < 1. Gdy p = 1, S = s i nie ma skończonej granicy przy s rosnącym bez ograniczeń. Przyjmujemy 0 ≤ p ≤ 1 i s ≥ 1, bez narzutu komunikacji.

Algorytmy liczbowe

schemat Hornera dla wielomianu

$$b_n = a_n, \qquad b_k = a_k + x b_{k+1}, \qquad W(x) = b_0$$

$W(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$; iteracja k = n-1, ..., 0. Kolejność współczynników jest od najwyższej potęgi.

krok algorytmu Euklidesa

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

a,b nieujemne całkowite, b > 0; zakończenie gcd(a,0) = a. gcd oznacza największy wspólny dzielnik (NWD), a mod to reszta z dzielenia całkowitego.

najmniejsza wspólna wielokrotność

$$\mathrm{NWW}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a, b)}$$

Dodatnie liczby całkowite a,b. Dla argumentu zero przyjmujemy NWW = 0 bez dzielenia przez gcd(0,0).

rekurencja ciągu Fibonacciego

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n ≥ 2 całkowite; jawnie przyjęte indeksowanie od zera.

Złożoność i grafy

liczba podziałów wyszukiwania binarnego

$$k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$$

Maksymalna liczba iteracji standardowego wyszukiwania w posortowanej tablicy długości n ≥ 0; sposób liczenia porównań może różnić się od iteracji.

rekurencja sortowania przez scalanie

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Dla n będącego potęgą 2 zapis jest bez zaokrągleń; koszt scalania liniowy.

Algorytm Euklidesa: kolejne reszty

krok	a	b	a mod b
1	252	105	42
2	105	42	21
3	42	21	0
4	21	0	—

NWD(252, 105) = 21.

Algorytm Euklidesa: kolejne reszty. W każdym kroku zamień (a, b) na (b, a mod b). Zatrzymaj się przy b = 0: ostatnie niezerowe a jest NWD. Przykład domyślny: NWD(252, 105) = 21; nie wykonuj dzielenia przez zero.

Wyszukiwanie binarne i sortowanie przez scalanie

krok	przedział / lewa część	element / prawa część	decyzja / wynik
1	[0, 4]	a[2] = 5	prawa połowa
2	[3, 4]	a[3] = 7	znaleziono

Znaleziono na indeksie 3. Sprawdzono 2 elementy środkowe.

Wyszukiwanie binarne i sortowanie przez scalanie. Tryb „szukaj” wymaga danych niemalejących i pokazuje przedział, środkowy element i decyzję. Indeksy liczymy od zera. Tryb „sortuj” pokazuje kolejne scalenia dwóch uporządkowanych części; kolumny oznaczają wtedy lewą część, prawą część i wynik. Liczba faktycznych porównań nie jest tym samym co notacja O.

Architektura komputera

Czas wykonania

czas wykonania programu $$t = \frac{Nc}{f}$$

Czas należy porównywać dla tego samego programu i danych. Wyższa częstotliwość sama w sobie nie gwarantuje krótszego czasu, bo może zmienić się liczba instrukcji albo średnia liczba cykli na instrukcję. N to liczba wykonanych instrukcji, c to średnia liczba cykli na instrukcję, f to częstotliwość zegara w hercach; t jest czasem pracy procesora w sekundach, bez oczekiwania na wejście/wyjście.

Metody numeryczne i błędy obliczeń

Bisekcja

środek przedziału w bisekcji ★ $$x_m = \frac{a+b}{2}$$

Dla ciągłej funkcji f na [a,b], a < b, ze zmianą znaku f(a)f(b) < 0, środek przedziału dzieli go na dwie połowy. Jeśli $f(x_m) = 0$, znaleziono pierwiastek; w przeciwnym razie zachowujemy połowę ze zmianą znaku. Po n podziałach szerokość przedziału wynosi $(b - a)/2^n$, a błąd jego środka nie przekracza $(b - a)/2^{n+1}$.

Błędy obliczeń

błąd bezwzględny przybliżenia $$\varepsilon = |x - x_0|$$

błąd względny przybliżenia $$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|x_0|}$$

x jest przybliżeniem, x_0 wartością odniesienia. Błąd względny jest zdefiniowany tylko dla $x_0 \neq 0$; w procentach wynosi $100\% \cdot \varepsilon_r$. To błąd względem wartości odniesienia, a nie automatycznie niepewność pomiarowa.

Obwody i sygnały w telekomunikacji

Obwód prądu stałego

prawo Ohma w obwodzie telekomunikacyjnym $$U = RI$$

Rezystor liniowy o dodatniej rezystancji; prąd stały, odbiornikowa konwencja znaków. Dla połączenia dwóch rezystorów R jest rezystancją zastępczą, a U i I napięciem i prądem całego połączenia.

rezystancja dwóch rezystorów szeregowych $$R = R_1 + R_2$$

Przez oba rezystory płynie ten sam prąd.

rezystancja dwóch rezystorów równoległych $$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Na obu rezystorach jest to samo napięcie; obie rezystancje są dodatnie.

moc wydzielana na rezystorze $$P = \frac{U^2}{R}$$

Prąd stały, rezystor liniowy; cała moc jest zamieniana na ciepło.

Przebieg sinusoidalny

okres sygnału sinusoidalnego $$T = \frac{1}{f}$$

Przebieg okresowy, dodatnia częstotliwość.

wartość skuteczna napięcia sinusoidalnego $$U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Czysta sinusoida bez składowej stałej; amplituda jest dodatnia. Wartość średnia po pełnym okresie wynosi zero.

Linia bezstratna

impedancja falowa linii bezstratnej $$Z_0 = \sqrt{\frac{L_j}{C_j}}$$

Jednorodna linia bezstratna: rezystancja i konduktancja jednostkowa równe zero. Parametry jednostkowe dodatnie.

prędkość propagacji w linii bezstratnej $$v = \frac{1}{\sqrt{L_j C_j}}$$

Jednorodna linia bezstratna, dodatnie parametry jednostkowe. To prędkość propagacji, nie przepływność bitowa.

opóźnienie propagacji w odcinku linii $$t_p = \frac{l}{v}$$

Jednorodna linia o znanej dodatniej prędkości propagacji. Nie obejmuje serializacji pakietu, przetwarzania ani kolejek.

Bilans toru

tłumienie mocy w decybelach

$$A = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{we}}{P_{wy}} \right)$$

Logarytm dziesiętny, obie moce dodatnie i w tych samych jednostkach. Dodatnie tłumienie oznacza stratę, ujemne — wzmocnienie. Dla napięć nie stosuj tej postaci bez sprawdzenia impedancji.

moc z poziomu dBm $P = P_0 10^{L/10}$

Dla dBm moc odniesienia wynosi dokładnie 1 mW. Ujemny poziom dBm oznacza dodatnią moc mniejszą od 1 mW.

poziom mocy na końcu toru $L_{wy} = L_{we} + G - A$

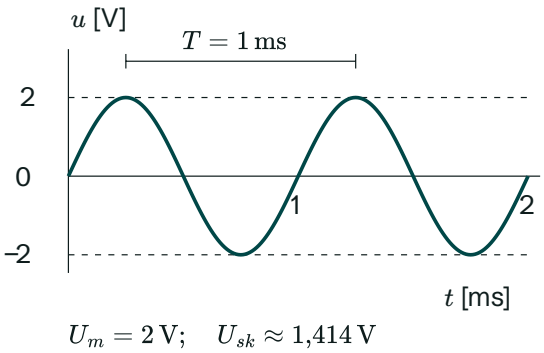
Poziomy wejściowy i wyjściowy w dBm, straty i wzmocnienia w dB. Sumuj straty wszystkich odcinków i złączy. Nie dodawaj samych wartości mocy w dBm.

Mały obwód DC: od napięcia do mocy

krok	działanie	wynik
natężenie	12 V / 100 Ω	0,12 A
moc	(12 V)² / 100 Ω	1,44 W
dobór	porównanie z dopuszczalną mocą	potrzebna dokumentacja elementu

Mały obwód DC: od napięcia do mocy. Rezystor 100 Ω zasilany napięciem 12 V. Sprawdź prąd i moc, a następnie porównaj moc z dopuszczalną mocą elementu podaną w dokumentacji. Dla połączeń używaj osobnych obliczeń rezystancji zastępczej.

Dwa okresy sinusoidy bez składowej stałej



$U_m = 2\,\mathrm{V}; \quad U_{sk} \approx 1{,}414\,\mathrm{V}$

Sinusoida: amplituda, okres i wartość skuteczna — legenda

wielkość	odczyt lub działanie	wynik
amplituda	od osi do maksimum	2 V
międzyszczytowa	od minimum do maksimum	4 V
okres	między sąsiednimi maksimami	1 ms
częstotliwość	1 / 0,001 s	1000 Hz
wartość skuteczna	2 V / √2	około 1,414 V

Sinusoida: amplituda, okres i wartość skuteczna. Dla czystej sinusoidy bez składowej stałej: amplituda 2 V, napięcie międzyszczytowe 4 V, okres 1 ms. Wartość średnia po pełnym okresie wynosi 0 V. Relacja amplitudy i wartości skutecznej zależy od kształtu przebiegu.

Linia bezstratna: parametry na metr

wielkość	działanie	wynik
impedancja falowa	$\sqrt{(L_j / C_j)}$	50 Ω
prędkość	$1 / \sqrt{(L_j C_j)}$	200 000 000 m/s
opóźnienie	100 m / v	0,5 μs

Linia bezstratna: parametry na metr. Przykład: indukcyjność jednostkowa 250 nH/m, pojemność jednostkowa 100 pF/m, długość 100 m. Nie podstawiaj parametrów całego kabla w miejsce parametrów na metr.

Bilans toru: dB i dBm

pozycja	zmiana poziomu	poziom
nadajnik	—	0 dBm
kabel	–8 dB	–8 dBm
złącza	–2 dB	–10 dBm
pozostałe straty	–2 dB	–12 dBm
moc na końcu	1 mW · 10^(–12/10)	około 0,0631 mW

Bilans toru: dB i dBm. Nadajnik: 0 dBm, czyli 1 mW. Podane straty kabla: 8 dB, złączy: 2 dB, pozostałych elementów: 2 dB. Suma strat wynosi 12 dB. Sam bilans nie uwzględnia czułości odbiornika ani wymaganego marginesu.

Stałe i przeliczniki

bit w bajcie	$1\ \mathrm{B} = 8\ \mathrm{bit}$
kilobajt (kB, dziesiętnie)	$1\ \mathrm{kB} = 10^3\ \mathrm{B} = 1000\ \mathrm{B}$
kibibajt (KiB, dwójkowo)	$1\ \mathrm{KiB} = 2^{10}\ \mathrm{B} = 1024\ \mathrm{B}$
mebibajt (MiB)	$1\ \mathrm{MiB} = 2^{20}\ \mathrm{B} = 1\,048\,576\ \mathrm{B}$
gibibajt (GiB)	$1\ \mathrm{GiB} = 2^{30}\ \mathrm{B} \approx 1{,}074 \cdot 10^9\ \mathrm{B}$
tebibajt (TiB)	$1\ \mathrm{TiB} = 2^{40}\ \mathrm{B} \approx 1{,}100 \cdot 10^{12}\ \mathrm{B}$
gigabajt a gibibajt	$1\ \mathrm{GB} \approx 0{,}931\ \mathrm{GiB}$
terabajt a tebibajt	$1\ \mathrm{TB} \approx 0{,}909\ \mathrm{TiB}$
przepływność: megabajty i megabity	$1\ \mathrm{MB/s} = 8\ \mathrm{Mbit/s}$